

ANNALES DES CONCOURS

MP

Physique · Modélisation · Chimie

2016

Sous la coordination de

Vincent FREULON

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Alexandre HERAULT

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Olivier FRANTZ

Professeur agrégé en école d'ingénieur

Vincent FREULON

Professeur en CPGE

Alexandre HERAULT

Professeur en CPGE

Fabrice MAQUÈRE

Professeur agrégé

Tom MOREL

Professeur en CPGE

Valentin RABAN

ENS Lyon



---

# Sommaire

---

		Énoncé	Corrigé
<b>CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES</b>			
Physique	Physique des ondes et particules associées. <i>interférences à N ondes, physique quantique</i>	11	19
Physique et Chimie	Étude thermique d'un bâtiment. L'eau de Javel. <i>diffusion thermique, électricité, cristallographie, solutions aqueuses, cinétique chimique, oxydoréduction, diagrammes E-pH, thermodynamique</i>	33	49
<b>CENTRALE-SUPÉLEC</b>			
Physique et Chimie 1	Confinement de particules. <i>physique quantique, physique statistique, magnétostatique, mécanique</i>	70	80
Physique et Chimie 2	Étude d'une installation nucléaire REP. <i>thermodynamique, mécanique en référentiel non galiléen, interférences, cinétique chimique, oxydoréduction, courbes courant-potentiel, thermodynamique</i>	97	109

---

**MINES-PONTS**

Physique 1	Le Millenium Bridge. <i>mécanique du point, ondes</i>	126	133
Physique 2	Détection des exoplanètes. <i>mécanique, thermodynamique, électrocinétique</i>	145	153
Chimie	Le béton. <i>cristallographie, solutions aqueuses, oxydoréduction, diagrammes E-pH, courbes courant-potentiel, thermodynamique</i>	165	173

**POLYTECHNIQUE-ENS**

Physique	Optomécanique d'une cavité. <i>électromagnétisme, mécanique, physique quantique</i>	183	190
Physique et Sciences de l'Ingénieur	Propagation dans les milieux non homogènes. Simulateur de conduite de véhicule à deux roues. <i>électromagnétisme, physique quantique, mécanique du solide, asservissements</i>	204	215

**FORMULAIRES**

Constantes chimiques	232
Constantes physiques	235
Formulaire d'analyse vectorielle	236
Classification périodique	240

# Sommaire thématique de chimie

2015 – 2016

e3a PSI Physique et Chimie		•	•	•	•		••				
CCP MP Physique et Chimie	••	•	•	•	••	•	••				
CCP PC Chimie	••	•	•	•			••	•	••	••	•
CCP PC Modélisation Phys-Chimie											
CCP PSI Physique et Chimie	•	•		••	•	•					
Centrale MP Physique et Chimie 1	•										
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•	•	••	•	••	•				
Centrale PC Chimie	•		•	••	••	•			••	••	•
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•			•							
Centrale PSI Physique et Chimie 2		•		•	•	•	•				
Mines MP Chimie	••	••		••	•	••	••				
Mines PC Chimie		•	••	•	•		•		••		
Mines PSI Chimie	••	••		••	•	••	••				
X/ENS PC Chimie			•	••			••	•	••	•	
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination

**CONCOURS COMMUNS  
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP****PHYSIQUE****Vendredi 6 mai : 8 h - 12 h**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**Les calculatrices sont autorisées**

Les trois parties du sujet peuvent être traitées de manière indépendante les unes des autres, même s'il y a entre elles un fil conducteur. A l'intérieur de chaque partie, de nombreuses questions sont aussi indépendantes les unes des autres. Le candidat peut utiliser une formule donnée dans l'énoncé, sans l'avoir démontrée, pour résoudre la suite du problème.

*Des réponses claires, précises, exposées avec rigueur, des formulations homogènes et des applications numériques suivies d'une unité et comportant le bon nombre de chiffres significatifs sont attendues.*

## Physique des ondes et particules associées

Dans ce problème, nous étudierons quelques propriétés d'ondes en utilisant des fonctions d'ondes mais aussi quelques propriétés des corpuscules associés comme les photons, les phonons et les électrons. Nous étudierons en particulier deux types de cavité : un interféromètre et un puits quantique.

Données ou formules nécessaires :

- constante de Planck  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J.s (on note  $\hbar$  la quantité  $h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$  J.s)
- constante de Boltzmann  $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$  J.K<sup>-1</sup>
- nombre d'Avogadro  $N_A = 6,0 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>
- vitesse de la lumière dans le vide  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>
- charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C
- masse de l'électron  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg
- gammes de longueurs d'onde  $\lambda$  du spectre électromagnétique des différents rayonnements :

$\gamma$	X	UV	visible	IR	radio
$\lambda < 10$ pm	$10 \text{ pm} < \lambda < 100 \text{ nm}$	$100 \text{ nm} < \lambda < 380 \text{ nm}$		$780 \text{ nm} < \lambda < 1 \text{ mm}$	$1 \text{ mm} < \lambda$

- intégration par parties  $\int_a^b v \cdot du = [v \cdot u]_a^b - \int_a^b u \cdot dv$
- formules trigonométriques  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$   
 $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  et  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

### I. Dualité onde-corpuscule

#### Ondes électromagnétiques

**I.1.** Rappeler quels sont les liens entre la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  d'une onde électromagnétique et les caractéristiques de la particule associée, le photon.

**I.2.** Quels sont les ordres de grandeur de l'énergie, exprimée en eV, d'un photon visible et d'un photon X qui est diffracté par les réseaux cristallins ?

**I.3.** Pour un photon qui se propage dans un milieu d'indice  $n$ , justifier pourquoi sa quantité de mouvement (impulsion) vaut en norme  $p = \frac{nh}{\lambda_0}$ .

#### Ondes de matière

**I.4.** Donner le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde associée à une particule non relativiste d'énergie  $E$  et de quantité de mouvement  $\vec{p} = m \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$ .

**I.5.**

**I.5.a.** Etablir la longueur d'onde associée à un électron, initialement immobile, non relativiste, accéléré avec une différence de potentiel  $U$ .

**I.5.b.** Déterminer la valeur de  $U$ , pour laquelle on obtiendrait la même longueur d'onde que celle d'un photon X de  $\lambda = 0,1$  nm.

**I.6.** Un électron, qui assure la conduction métallique, doit-il être considéré comme quantique ? On considère que le réseau cristallin est caractérisé par un paramètre de maille  $a$  de l'ordre de  $10^{-10}$  m et que les électrons libres ont une vitesse due à l'agitation thermique. On se placera à 300 K.

**I.7.** Pouvez-vous citer les noms de 3 physiciens qui se sont illustrés par leur contribution en physique quantique ? Placer leurs travaux par ordre chronologique.

### Diffusion Brillouin

**I.8.** Une onde sonore monochromatique se décrit, comme toute onde, au moyen d'une pulsation  $\omega$  et d'un vecteur d'onde  $\vec{k}$ . On lui associe une particule appelée phonon.

**I.8.a.** Donner la quantité de mouvement  $\vec{q}$  du phonon associé à une onde acoustique de fréquence  $\nu$ , qui se propage dans l'eau avec une célérité  $\vec{V} = V\vec{u} = \frac{\omega}{k}\vec{u}$ ,  $\vec{u}$  étant le vecteur unitaire de la direction de propagation orienté dans le sens de la propagation.

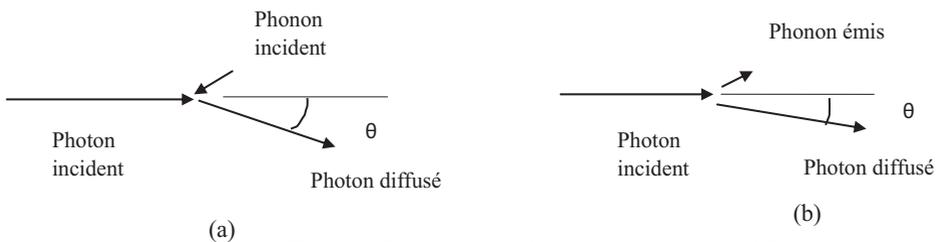
**I.8.b.** Donner l'énergie  $e_p$  de ce phonon.

**I.8.c.** Evaluer numériquement  $q = \|\vec{q}\|$  et  $e_p$  (en eV), pour une fréquence sonore de 1,0 kHz et une vitesse de propagation  $V = 1,5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**I.8.d.** Comparer les caractéristiques de ce phonon avec celles d'un photon du domaine visible.

**I.9.** La diffusion Brillouin correspond à un choc entre une particule photon incident et une particule phonon avec annihilation du phonon et diffusion d'un photon émergent. On suppose que le système est un système isolé. La situation des vecteurs quantités de mouvement avant et après le choc est représentée par les vecteurs de la **figure 1 (a)**.

Justifier pourquoi la quantité de mouvement se conserve dans un système isolé. Quelle autre grandeur est conservative ?



**Figure 1 - Vecteurs quantités de mouvement annihilation (a) ou création (b) d'un phonon à partir d'un photon incident**

**I.10.** On considère un phonon associé à l'onde sonore, engendrée dans l'eau liquide, qui se propage avec une célérité  $V = 1525 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , à  $50^\circ\text{C}$ . L'indice optique de l'eau vaut 1,33. Une source de lumière laser, de longueur d'onde  $\lambda_{inc} = 0,53 \mu\text{m}$  et de fréquence  $\nu_{inc}$ , arrive sur une cuve remplie d'eau liquide juste saturante. La collision photon-phonon engendre un photon de longueur d'onde  $\lambda_{ém}$  (fréquence  $\nu_{ém}$ ).

## CCP Physique MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) et Julien Dumont (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet, composé de trois parties quasiment indépendantes, traite des ondes et de leur détection.

- La première partie est consacrée à la dualité onde-corpuscule. Après un rappel de plusieurs formules proches du cours, le sujet étudie la diffusion Brillouin, c'est-à-dire le choc entre un photon et un phonon. Cette partie repose sur le cours de mécanique quantique de première année.
- L'interféromètre de Fabry-Pérot est étudié dans la deuxième partie. On s'intéresse tout d'abord aux conditions d'interférence pour une onde en incidence normale. Puis on calcule la différence de marche pour une onde avec une incidence faible. Finalement, on trouve les conditions pour détecter deux ondes de longueurs d'onde très proches. L'énoncé s'appuie sur des notions d'interférences à  $N$  ondes.
- Enfin, la troisième partie concerne le confinement d'une particule quantique dans un puits de potentiel infini. On utilise des raisonnements de mécanique quantique de seconde année. Notons que cette partie est mal calibrée car le calcul des fonctions d'onde est beaucoup plus difficile que ce qui est fait en cours en seconde année. De plus, la première question est hors programme et bloquante, puisqu'on a besoin de l'équation pour répondre à peu près à toute la suite.

De longueur raisonnable, ce sujet alterne des questions très proches du cours et d'autres plus difficiles. Certaines questions sont très mal posées, aucun résultat intermédiaire n'est fourni et beaucoup de questions sont redondantes. De quoi déstabiliser bien des candidats !

## INDICATIONS

I.5.a Utiliser le théorème de l'énergie cinétique  $\Delta E_c = eU$ .

I.6 L'énergie cinétique pour un électron libre s'écrit  $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T$ .

I.10.c Utiliser par exemple l'ordre de grandeur entre les deux raies jaunes du sodium qui ne sont pas séparées par un spectromètre en TP.

II.9.a On pourra s'inspirer de la démonstration de la différence de marche pour l'interféromètre de Michelson configuré en lame d'air.

II.9.b L'amplitude du deuxième rayon émergent s'écrit  $a_2 = r^2 a e^{i\Phi}$ .

II.10.c Le facteur de transmission est minimal lorsque  $\sin^2(\pi \Delta d / \lambda_0) = \rho^2 / 4$ . On procède ensuite à un développement limité car  $\rho \ll 1$ .

III.1 Cette question est hors programme. L'équation de Schrödinger est

$$E \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + U(x) \varphi(x)$$

III.3 Écrire les solutions sous la forme  $\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ .

III.4 Utiliser la condition de normalisation de la fonction d'onde

$$\int_{-a}^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

III.8 Par définition, la valeur moyenne s'écrit  $\langle x \rangle = \int_{-a}^a x |\psi_n(x)|^2 dx$ .

# PHYSIQUE DES ONDES ET PARTICULES ASSOCIÉES

## I. DUALITÉ ONDE-CORPUSCULE

**I.1** D'après les formules respectives de De Broglie et Planck-Einstein :

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \text{et} \quad E = \hbar\omega$$

avec  $\vec{p}$  la quantité de mouvement et E l'énergie du photon.

**I.2** La formule de Planck-Einstein peut s'écrire  $E = hc/\lambda$ . Considérons une onde dans le visible de longueur d'onde  $\lambda = 600$  nm. Il vient

$$E_{\text{visible}} = 3,3 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,1 \text{ eV}$$

Dans le domaine des rayons X, prenons  $\lambda = 10^{-10}$  m. L'énergie vaut

$$E_X = 2 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 10^4 \text{ eV}$$

**I.3** La longueur d'onde  $\lambda_n$  d'un photon dans un milieu d'indice  $n$  s'écrit

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$$

D'après la formule de De Broglie,  $\|\vec{p}\| = \hbar k$

$$\text{Avec } k = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad = \frac{h}{\lambda_n}$$

$$p = \frac{nh}{\lambda_0}$$

**I.4** Pour une onde de matière, on a de même

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

**I.5.a** L'énergie cinétique est donnée par  $E_c = p^2/2m_e$  et l'énergie potentielle d'un électron soumis à un potentiel électrique V vaut  $E_p = -eV$ . Ainsi, la conservation de l'énergie mécanique impose entre les états initial (noté i) et final (f)

$$E_{c,f} + E_{p,f} = E_{c,i} + E_{p,i}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \frac{p^2}{2m_e} + (-e)V_f = 0 + (-e)V_i$$

$$\text{Or } U = V_f - V_i, \text{ donc} \quad p = \sqrt{2m_e e U}$$

$$\text{Avec } p = \frac{h}{\lambda},$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e e U}}$$

**I.5.b** D'après la question précédente, avec  $\lambda = 10^{-10}$  m,

$$U = \frac{h^2}{2m_e e \lambda^2} = 150 \text{ V}$$

**I.6** Comparons la longueur d'onde de De Broglie  $\lambda_{dB}$  au paramètre de maille  $a$ . La vitesse quadratique moyenne des électrons à  $T = 300$  K, avec  $E_c = 3k_B T/2$ , s'écrit

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$$

$$\text{Or } p = m_e v = \frac{h}{\lambda_{dB}}, \quad \lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{3m_e k_B T}} = 6,0 \cdot 10^{-9} \text{ nm}$$

On remarque que  $\lambda_{dB} \gg a$ , c'est-à-dire que l'étalement du paquet d'onde de l'électron, caractérisé par  $\lambda_{dB}$ , est très grand devant le paramètre de maille.

L'électron doit être traité quantiquement à  $T = 300$  K.

**I.7** Par ordre chronologique, on peut citer par exemple :

- **Bohr** et son modèle de l'atome qui a permis d'expliquer les spectres de raies des vapeurs atomiques (1910) ;
- **Schrödinger** et son équation d'évolution d'un système quantique (1920) ;
- **Heisenberg** et sa relation d'incertitude (1930).

**I.8.a** Appliquons la formule de De Broglie,

$$\vec{q} = \hbar \vec{k}$$

Un phonon se propage à la célérité  $\vec{V} = \omega/k \vec{u}$ . Avec  $\omega = 2\pi\nu$ , on arrive à

$$\vec{q} = \frac{h\nu}{V} \vec{u}$$

**I.8.b** La formule de Planck-Einstein est toujours valable. Par conséquent,

$$e_p = h\nu$$

**I.8.c** L'application numérique conduit à :

$$q = 4,4 \cdot 10^{-34} \text{ kg.m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad e_p = 4,1 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$$

**I.8.d** Pour un photon dans le visible avec  $\lambda = 600$  nm,

$$p = \frac{h}{\lambda} = 1,1 \cdot 10^{-27} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

Avec le résultat de la question I.2, **la quantité de mouvement et l'énergie du phonon sont très faibles devant celles d'un photon dans le visible.**

**I.9** Un système isolé n'est soumis à aucune force extérieure. Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique appliqué au barycentre du système isolé s'écrit

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{C}^{\text{te}}$$

**La quantité de mouvement d'un système isolé se conserve.** De même, **l'énergie du système se conserve** pour ce type de système.

| Le moment cinétique d'un système isolé est aussi conservé.

## CCP Physique et Chimie MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) et Alexandre Herault (Professeur en CPGE) ; il a été relu Tom Morel (Professeur en CPGE), Augustin Long (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, l'un de physique, l'autre de chimie. Le problème de physique traite de la diffusion thermique et de son analogie électrique. Il est divisé en trois parties de difficulté progressive.

- Dans une première partie, il s'agit de modéliser mathématiquement puis électriquement le comportement d'une pièce chauffée par un radiateur. L'influence des murs dans la dissipation thermique est ensuite étudiée. Cette partie est très proche du cours et a pour but de mettre en place les outils utilisés dans la suite : capacité et résistance thermiques.
- Le sujet propose dans un deuxième temps un circuit électrique analogue à la pièce chauffée et à ses murs afin d'établir les propriétés dynamiques du système. Les notions d'impédance complexe, de fonction de transfert et de diagramme de Bode sont exploitées en ce sens.
- Enfin, le sujet se penche sur l'isolation et les échanges convectifs avec l'air extérieur. On doit proposer des modifications du schéma électrique équivalent et étudier les répercussions sur la fonction de transfert.

Les notions utilisées dans ce problème sont classiques, ce qui le rendait très abordable. Le modèle électrique n'est pas surprenant. Quelques questions qualitatives permettaient de distinguer les candidats qui avaient su prendre du recul.

Le problème de chimie a pour thème l'eau de Javel, qui est une solution aqueuse d'hypochlorite de sodium ( $\text{Na}^+ + \text{ClO}^-$ ) et de chlorure de sodium ( $\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ ), en présence d'un excès de soude. Il est divisé en trois parties.

- La première partie étudie quelques généralités autour de l'élément chlore à travers l'atomistique, la thermodynamique chimique et la cristallographie. Les questions sont classiques et sont des applications directes du cours.
- La deuxième partie concerne les ions hypochlorite  $\text{ClO}^-$ . On s'intéresse à leur stabilité en étudiant le diagramme potentiel-pH du chlore.
- La troisième partie est une étude cinétique de la décomposition d'un colorant alimentaire en présence d'ions hypochlorite. Le suivi est réalisé par spectrophotométrie. On détermine les ordres partiels de la réaction de décomposition ainsi que la constante de vitesse. Ce sont les techniques classiques de cinétique chimique qui sont ici mises à profit.

Ce problème utilise une large part du programme de chimie de la filière MP. Il n'est pas très difficile tout en étant bien représentatif de ce que l'on attend d'un candidat de cette filière.

## INDICATIONS

### Physique

- I.1.a La capacité thermique est la quantité d'énergie qu'il faut fournir à un système pour augmenter sa température de 1 K.
- I.1.b Puisque la pièce est isolée, il n'y a ni entrée ni sortie d'énergie mais il y a apport d'énergie par l'intermédiaire du radiateur.
- I.1.d Penser à un dipôle élémentaire dont la relation constitutive est similaire.
- I.2.a La surface  $S_p$  est celle par laquelle le flux thermique est échangé. Il ne faut donc compter que les surfaces des murs.
- I.3.b Considérer que le flux d'énergie est unidimensionnel, qu'aucun transfert de chaleur n'a lieu verticalement.
- I.4.e La puissance fournie par le radiateur compense la diffusion à travers les murs.
- I.5.b La résistance thermique augmente avec la longueur traversée, diminue avec la surface offerte et est proportionnelle à la conductivité.
- I.6.a Ne pas préciser les valeurs de  $R_1$  et de  $R_2$ , mais se contenter de celle de  $R_1 + R_2$ .
- I.6.b En régime permanent, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la température moyenne est égale à la température au milieu du mur.
- I.8.a Remplacer les condensateurs par leur modèle basse ou haute fréquence (circuit ouvert ou fil) pour prévoir le comportement asymptotique du circuit.
- I.9.b Chaque rupture de pente a lieu pour une des pulsations particulières.
- I.11.c Reprendre la fonction de transfert établie à la question I.7.d et remplacer la résistance  $R_1$  (ou  $R_2$ ) par  $R_1 + R_i$  (ou  $R_2 + R_i$ ).
- I.11.d En isolation par l'intérieur, le mur ne reçoit presque plus d'énergie depuis la pièce. Son influence (méplat sur le Bode) disparaît alors qu'elle est toujours visible en isolation extérieure.
- I.12.e Supposer dans cette question que le sol n'est plus parfaitement isolé. Un flux thermique va alors s'établir entre la pièce et l'air extérieur via le sol. Le modèle est identique à la transmission au travers d'un mur en béton.

### Chimie

- II.1.b Le chlore peut être hypervalent.
- II.2.a Regarder l'évolution de la quantité de matière de gaz pendant la réaction. Il n'est pas possible de prévoir le signe demandé.
- II.2.d Remarquer que l'évolution se fait aussi à pression constante pour écrire la relation à l'équilibre avec les fractions molaires. Il est pratique d'introduire le taux d'avancement.
- II.4.b Que se passe-t-il pour le dichlore en milieu basique ?
- II.4.c Écrire la définition du pourcentage de chlore actif en introduisant la concentration en ions hypochlorite.
- II.4.e Il y a deux décompositions distinctes : l'action de l'eau et la dismutation. Écrire les demi-équations électroniques.
- II.5.c Calculer le facteur de dilution par rapport à la solution mère.
- II.5.e Ne pas oublier le rôle de la cuve et du solvant.
- II.6.a Les ions hypochlorite sont en grand excès.
- II.8.a La concentration en ions hypochlorite est divisée par 2. Déterminer la nouvelle constante de vitesse apparente.

# ÉTUDE THERMIQUE D'UN BÂTIMENT

## PRÉAMBULE

**I.1.a** La capacité thermique volumique représente la quantité d'énergie par unité de volume qu'il faut fournir au système pour augmenter sa température d'un kelvin, à pression constante,

$$C_v = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P$$

Ainsi,

La capacité thermique volumique  $C_v$  s'exprime en  $\text{J.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$ .

La capacité thermique de la pièce vaut

$$C = C_v a b h = 125 \text{ kJ.K}^{-1}$$

**I.1.b** La pièce est parfaitement calorifugée. Pendant un intervalle de temps  $dt$ , le radiateur fournit une énergie égale à  $P dt$ . Le premier principe appliqué à la pièce entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit

$$H(t + dt) - H(t) = dH = P dt$$

Par définition de la capacité thermique,

$$dH = C dT$$

donc

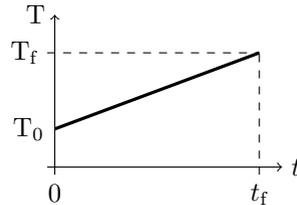
$$C \frac{dT}{dt} = P$$

**I.1.c** La capacité thermique et la puissance du radiateur étant constantes, on a

$$T(t) = T_0 + \frac{P}{C} t$$

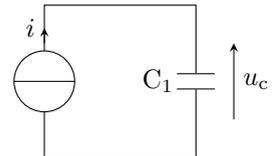
Pour atteindre la température  $T_f$ , il faut une durée

$$t_f = \frac{C}{P} (T_f - T_0) = 625 \text{ s} = 10,4 \text{ min}$$



**I.1.d** Le modèle électrique équivalent est constitué d'une source idéale de courant et d'un condensateur. On a la relation, aux bornes du condensateur,

$$i = C_1 \frac{du_c}{dt}$$



On associe ainsi entre elles les grandeurs suivantes :

grandeur thermodynamique

grandeur électrique

température  $T$

potentiel  $V$

capacité thermique  $C$

capacité du condensateur  $C_1$

puissance thermique  $P$

intensité électrique  $i$

**I.2.a** En négligeant l'épaisseur des murs devant leurs autres dimensions, la surface de la pièce par laquelle on peut avoir des pertes thermiques est la surface latérale. Elle vaut donc

$$S_p = 2ah + 2bh = 65 \text{ m}^2$$

**I.2.b** Le volume des murs est égal à

$$V_b = S_p L = 9,8 \text{ m}^3$$

On en déduit la capacité thermique des murs

$$C_{\text{mur}} = \rho S_p L c = 2,1 \cdot 10^7 \text{ J.K}^{-1}$$

La capacité thermique des murs est **170 fois plus grande** que celle de l'air :

$$\frac{C_{\text{mur}}}{C} = 1,7 \cdot 10^2$$

Il faut beaucoup plus d'énergie pour augmenter la température des murs que pour augmenter celle de l'air

Les murs en béton sont les principaux responsables du temps de montée en température de la pièce.

## ÉQUATION DE LA CHALEUR

**I.3.a** La loi de Fourier exprime la proportionnalité entre le courant thermique et le gradient de température :

$$\vec{J} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$$

Le signe moins indique que le transfert thermique s'effectue **des hautes températures vers les basses**. La densité de flux thermique  $j$  s'exprime en  $\text{W.m}^{-2}$  et représente la **puissance thermique qui passe à travers le mur par unité de surface**.

La conductivité thermique est le coefficient de proportionnalité qui intervient dans la loi de Fourier :

$$\lambda = -\frac{j}{dT/dx}$$

La conductivité thermique a donc pour dimension celle d'une puissance par unité de surface divisée par celle d'un gradient de température. Or, une puissance a la dimension d'une énergie divisée par un temps et la dimension d'une énergie est  $\text{M.L}^2.\text{T}^{-2}$ . En notant  $\Theta$  la dimension de la température,

$$[\lambda] = \frac{\text{M.L}^2.\text{T}^{-3}.\text{L}^{-2}}{\Theta.\text{L}^{-1}} = \text{M.L.T}^{-3}.\Theta^{-1}$$

## Centrale Physique et Chimie 1 MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Henri Lastakowski (Professeur en CPGE) et Louis Salkin (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet comporte deux parties consacrées respectivement à la magnétosphère terrestre et au confinement d'objets quantiques. Ces deux parties sont entièrement indépendantes.

- Dans la première partie, après avoir caractérisé les aurores polaires on décrit le mouvement d'un électron dans un champ magnétique uniforme et ses caractéristiques. On traite ensuite le cas d'un champ magnétique non uniforme. Cette partie repose essentiellement sur des notions de mécanique dans un champ magnétique et sur quelques éléments de magnétisme.
- On s'intéresse dans la seconde partie au confinement d'objets quantiques. On étudie d'abord une particule confinée dans un potentiel harmonique à une dimension, puis on démontre quelques propriétés dans le cas bidimensionnel. On termine en étudiant l'oscillateur harmonique dans le cadre de la physique statistique. Cette partie requiert des notions de mécanique quantique et de physique statistique vues en seconde année.

Cette épreuve fait appel à de nombreuses connaissances relatives au magnétisme et à la physique quantique. On notera que la deuxième partie est bien dans l'esprit des « nouveaux programmes ». À ce titre, ce sujet peut servir de problème de révision sur la physique quantique. Cette épreuve alterne des questions ouvertes, indiquées par un trait plein sur le sujet, des questions difficiles et des raisonnements proches du cours. Peu de résultats intermédiaires sont donnés ; toutefois, le sujet comporte suffisamment de passages indépendants pour qu'il soit toujours possible de progresser.

## INDICATIONS

### Partie I

I.B.3.a Utiliser la formule du champ magnétique créé par un dipôle magnétique en  $r = R_g$  et  $r = R_T$  sachant que  $B(R_T) = 5 \cdot 10^{-5}$  T.

I.B.3.b Déterminer les équations horaires et vérifier que l'on obtient bien l'équation d'un cercle :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

avec  $R$  le rayon du cercle.

I.B.4.a Écrire la force de Coulomb pour trouver la dimension de  $\varepsilon_0$ .

I.B.4.b Utiliser le théorème de la puissance cinétique.

I.C.1 Prendre un contour cylindrique fermé compris entre  $z$  et  $z + dz$ . Le champ magnétique est à flux conservatif donc

$$\Phi_{\text{tot}} = 0$$

I.C.6.a Utiliser l'énergie potentielle d'un dipôle  $\vec{M}$  dans un champ magnétique :

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

Les particules vont se localiser dans les minima d'énergie potentielle.

### Partie II

II.A.1.e Identifier l'écart-type grâce au formulaire puis, avec  $\langle x \rangle = 0$ , utiliser

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

II.A.1.h La dégénérescence consiste à compter le nombre de couples  $(n_x, n_y)$  qui vérifient, pour un entier  $n$  fixé,

$$n_x + n_y = n$$

II.A.2.e Trouver l'expression des fréquences d'absorption  $f_{\pm}$  entre  $E'_0$  et  $E_{\pm}$  puis tracer ces courbes sur la figure 5.

II.A.3 Écrire l'énergie totale en utilisant la question II.A.1.g et faire un développement limité à l'ordre le plus bas non nul en  $\varepsilon$ .

II.A.4.b Les énergies excitées ne doivent pas être accessibles par la particule.

II.A.4.d Utiliser la condition de normalisation de la fonction d'onde

$$\int_0^D |\phi(z)|^2 dz = 1$$

II.B.3 Penser à l'astuce mathématique

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n} = -\frac{d}{d\beta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \right)$$

II.B.4 Le comportement classique s'obtient pour  $\hbar \rightarrow 0$ .

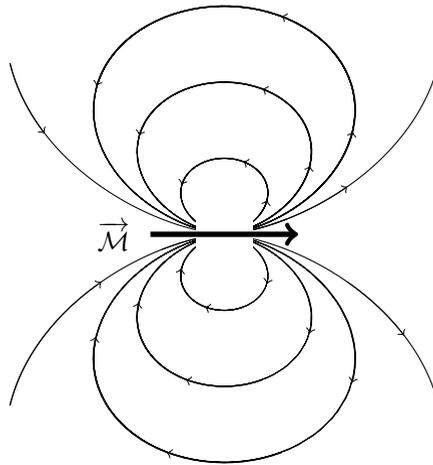
## I. CONFINEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

**I.A.1** Le vent solaire excite les particules de l'ionosphère. En se désexcitant, ces mêmes particules retournent dans leur état de repos et **rayonnent dans le visible**.

La transition entre deux niveaux d'énergie électroniques, de l'ordre de quelques eV, correspond effectivement à l'émission d'un photon dans le domaine visible.

**I.A.2** L'axe magnétique de la Terre étant quasiment orthogonal au vent solaire, si le phénomène se produit dans l'hémisphère Nord, par symétrie, il va aussi se produire dans l'hémisphère Sud.

**I.A.3** Représentons les lignes de champ d'un dipôle magnétique :



D'après la figure 1, on constate que les lignes de champ terrestre sont **repoussées par le vent solaire**.

**I.B.1** Calculons le rapport des normes du poids  $mg$  et de la force de Lorentz magnétique  $evB$  avec  $B$  la valeur du champ magnétique terrestre,  $v$  la vitesse de l'électron. Estimons  $v$  pour une énergie cinétique de 1 keV :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

Ainsi

$$\frac{mg}{evB} = 6 \cdot 10^{-14}$$

De fait,

Le poids est négligeable devant la force magnétique.

**I.B.2** Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

Projetons cette équation sur  $\vec{u}_z$ . Le champ magnétique est selon  $\vec{u}_z$  donc

$$(\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{u}_z = 0$$

Ainsi  $v_z(t) = v_{0z}$ . Puisque la force magnétique de Lorentz ne travaille pas, l'énergie cinétique de l'électron est conservée au cours du mouvement. Entre l'instant initial et un instant  $t$  quelconque,

$$\frac{1}{2} m v_{0z}^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_{0z}^2)$$

Cette équation implique  $v_x(t) = v_y(t) = 0$  à tout instant. La particule ne ressent pas le champ magnétique.

La particule est en mouvement rectiligne uniforme selon  $\vec{u}_z$ , parallèlement aux lignes de champ magnétique.

**I.B.3.a** Le principe fondamental de la dynamique se met sous la forme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e B_0}{m} (\vec{v} \wedge \vec{u}_z)$$

$e B_0/m$  est donc homogène à une pulsation, d'où

$$\omega_c = \frac{e B_0}{m}$$

Évaluons le champ magnétique terrestre à l'altitude d'un satellite géostationnaire en  $R = R_g$ . Le champ magnétique créé par le dipôle magnétique terrestre est donné dans le formulaire, et peut s'écrire en norme

$$B(r) = \frac{\mu_0 k}{4\pi r^3}$$

où  $k$  est une constante directement liée au moment magnétique et ne dépendant pas de  $r$ . Or, le champ magnétique à la surface de la Terre ( $r = R_T$ ) vaut  $5 \cdot 10^{-5}$  T. Dans ce cas,  $B(R_g)$  peut se réécrire

$$B(R_g) = B(R_T) \left( \frac{R_T}{R_g} \right)^3 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

d'où

$$\omega_c = \frac{e B(R_g)}{m} = 4 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

**I.B.3.b** En calculant le produit vectoriel  $\vec{v} \wedge \vec{u}_z$ , le principe fondamental de la dynamique se met sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = -\omega_c \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations s'écrit 
$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\omega_c v_y \\ \dot{v}_y = \omega_c v_x \end{cases}$$

Dérivons la première, 
$$\ddot{v}_x = -\omega_c \dot{v}_y = -\omega_c^2 v_x$$

On obtient une équation différentielle du deuxième ordre. La solution s'écrit

$$v_x(t) = A \cos \omega_c t + C \sin \omega_c t$$

## Centrale Physique et Chimie 2 MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Fabrice Maquère (Professeur agrégé) ; il a été relu par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur), Vincent Wieczny (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet composé de trois parties indépendantes s'intéresse à quelques aspects de la production d'électricité par une centrale nucléaire.

- Dans la première partie, on étudie le cycle thermodynamique d'une centrale. On regarde tout d'abord le circuit secondaire en comparant les rendements de plusieurs cycles grâce au diagramme  $(P, h)$  de l'eau. Les notions de première année en thermodynamique suffisent pour répondre aux questions. L'étude du cycle thermodynamique se termine par l'enrichissement de l'uranium par centrifugation. Cette sous-partie, très courte, repose sur des notions de seconde année concernant les référentiels non galiléens.
- La deuxième partie s'intéresse dans un premier temps à l'enrichissement en tritium de l'eau par électrolyse. C'est l'occasion de mettre en œuvre les connaissances en électrochimie : réactions, électrolyseur et courbes courant-potentiel. Puis on aborde les oxydes de ruthénium : on étudie leurs natures cristallines puis la réaction de décomposition de  $\text{RuO}_4$  en  $\text{RuO}_2$  en utilisant la loi d'Arrhenius et l'enthalpie libre standard de réaction.

Les questions sont classiques et proches du cours, sauf trois (II.A.3.a, II.B.1 et II.B.2) qui demandent plus d'initiative en mettant notamment en relation les données de l'énoncé et ses propres connaissances dans ce qui ressemble à de petites résolutions de problème.

- Dans la dernière partie, on s'intéresse à la surveillance et à la détection des séismes. En partant de l'interféromètre de Michelson, on montre que la figure obtenue grâce au photodétecteur permet de remonter à l'amplitude du séisme. Cette partie s'appuie essentiellement sur le cours d'interférences et demande d'exploiter des graphiques plutôt que d'établir des résultats formels ou de mener des calculs.

## INDICATIONS

### Partie I

I.A.2.c Dans le domaine du liquide, les isentropiques sont verticales.

I.A.3.c En prenant en compte tous les travaux et les transferts thermiques positifs, le rendement s'écrit

$$\eta = -\frac{w_{u,BC'} + w_{u,B'C''}}{q_{AA'} + q_{A'B} + q_{C'B'}}$$

I.B.3 Utiliser la formule de l'accélération d'entraînement

$$\vec{a}_{ie} = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

avec H le projeté du point M sur l'axe de rotation.

I.B.4 Résoudre l'équation différentielle vérifiée par  $n^*(r)$  en utilisant la méthode de séparation des variables.

I.B.5 La statistique de Maxwell-Boltzmann s'écrit :

$$n^*(r) = n^*(0) \exp\left(\frac{-E_p}{k_B T}\right)$$

### Partie II

II.A.1.e Les membranes utilisées sont semi-perméables.

II.A.2.a Pour qu'il y ait enrichissement de la solution en tritium, il suffit que plus d'hydrogène que de tritium quitte la solution.

II.A.2.b Penser aux facteurs cinétiques classiques, ainsi qu'à l'apport des réactifs aux électrodes.

II.A.3.b La tension  $U_c$  se décompose en plusieurs termes : potentiels d'oxydoréduction, surtension et terme ohmique.

II.B.1 Procéder par élimination au début puis discuter des propriétés physiques pour chaque type de cristal restant.

II.B.2 L'enthalpie de réaction s'obtient en exploitant la figure 8 et l'énergie d'activation se calcule en utilisant les données du tableau 2 pour tracer un graphe mettant en relation  $\ln k$  ( $k$  étant la constante cinétique) et  $1/T$  ( $T$  étant la température).

### Partie III

III.C La mesure est optimale si la sensibilité est maximale.

III.D.2 Entre A et B, le miroir n'a effectué qu'une demi-période.

III.D.3 Deux maxima globaux consécutifs sont séparés de  $\lambda$ .

III.D.4 La longueur d'onde d'un laser hélium-néon est de 633 nm.

## ÉTUDE D'UNE INSTALLATION NUCLÉAIRE REP

### I. CIRCUIT SECONDAIRE ET ENRICHISSEMENT DE L'URANIUM

**I.A.1.a** Le cycle de Carnot est composé de deux adiabatiques réversibles et de deux isothermes réversibles. L'énergie interne  $U$  et l'entropie  $S$  sont des fonctions d'état, donc sur un cycle :

$$\Delta U = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S = 0$$

Le cycle étant réversible, l'entropie créée est nulle. Le premier et le deuxième principes de la thermodynamique appliqués sur un cycle s'écrivent

$$0 = W + Q_{\text{ch}} + Q_{\text{fr}} \quad \text{et} \quad 0 = S_{\text{ech}}$$

Le fluide est en contact avec deux thermostats, d'où

$$S_{\text{ech}} = \frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}}} + \frac{Q_{\text{fr}}}{T_{\text{fr}}}$$

Avec le deuxième principe  $\frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}}} + \frac{Q_{\text{fr}}}{T_{\text{fr}}} = 0$

Le rendement  $\eta_c$  est le rapport de l'énergie voulue  $W$  sur ce qu'on a « payé » pour l'avoir, c'est-à-dire  $Q_{\text{ch}}$ . Donc

$$\begin{aligned} \eta_c &= \frac{-W}{Q_{\text{ch}}} \\ &= \frac{Q_{\text{ch}} + Q_{\text{fr}}}{Q_{\text{ch}}} \quad (\text{d'après le premier principe}) \\ &= 1 + \frac{Q_{\text{fr}}}{Q_{\text{ch}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}}}} \quad (\text{d'après le deuxième principe})$$

**I.A.1.b** Application numérique :  $\boxed{\eta_c = 0,44}$

**I.A.1.c** La centrale nucléaire cède de l'énergie sous forme de travail,  $|W| = P_e \Delta t$ , et reçoit de l'énergie de nature thermique,  $Q_{\text{ch}} = P_t \Delta t$ . Avec

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{\text{ch}}}$$

Il vient

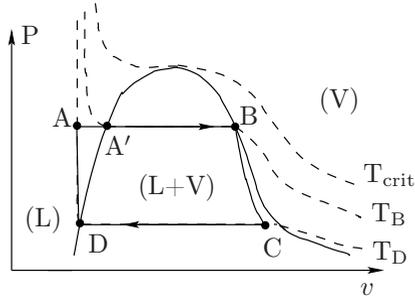
$$\boxed{\eta = \frac{P_e}{P_t} = 0,32}$$

L'efficacité est strictement inférieure à celle obtenue pour le cycle de Carnot. Ceci est en accord avec le deuxième principe. En effet, l'efficacité de Carnot est la plus grande possible pour une machine en contact avec deux thermostats.

Lorsqu'une efficacité est trouvée inférieure à celle de Carnot, on lit souvent des commentaires lapidaires selon lesquels la machine a un fonctionnement irréversible. Ce n'est pas inexact, mais n'apporte pas grand-chose. En effet, les machines réelles ont *toujours* un fonctionnement irréversible. Sans prendre en compte le caractère « imparfait » des dispositifs, la quête de la réversibilité est d'autant moins une priorité pour les ingénieurs qu'une machine ayant

un fonctionnement réversible a forcément une puissance nulle. En effet, lors d'une transformation réversible, on passe par une succession infinie d'états d'équilibre infiniment proches. La puissance est forcément nulle. Si on cherche à limiter au maximum certaines causes d'irréversibilité telle que les frottements mécaniques, on accepte nécessairement les mises en contact de systèmes à des températures différentes par exemple.

**I.A.2.a** Au point C, le fluide est diphasé. Notons par ailleurs (L) le domaine du liquide, (L + V) le domaine d'équilibre du liquide et du gaz, et (V) celui de la vapeur. Le cycle dans le diagramme (P, v) est



Rappelons que les isothermes sont horizontales dans le domaine (L + V). En effet, lors d'un changement d'état à pression constante, la température reste constante.

**I.A.2.b** Regardons les valeurs du liquide saturant (point A') et de la vapeur saturante (point B) à  $P_2 = 55$  bar, puis le liquide saturant (point D) à  $P_1 = 43$  mbar. On a le tableau de données suivant :

	A'	B	D
T (°C)	270	270	30
h (kJ.kg <sup>-1</sup> )	1 190,10	2 788,46	125,22
s (J.K <sup>-1</sup> .kg <sup>-1</sup> )	2,985 3	5,922 6	0,434 8

**I.A.2.c** Pour les points A', B et D, il suffit de les placer grâce aux valeurs numériques de la question précédente. Pour les points A et C, la méthode est la suivante :

- Pour le point C, la transformation (BC) est adiabatique réversible donc isentropique. En partant du point B, il faut suivre l'allure des isentropiques jusqu'à la température  $T_C = 30$  °C.
- Pour le point A, partons du point D. Le liquide est une phase condensée donc sa variation d'entropie massique s'écrit

$$ds = \frac{dh}{T}$$

La transformation (DA) est isentropique donc  $ds = 0$ , c'est-à-dire  $dh = 0$ . Cette transformation est alors isenthalpique. Finalement, pour rejoindre le point A, il faut suivre l'allure des isenthalpes dans le liquide, c'est-à-dire une droite verticale jusqu'à la pression  $P_1 = 43$  mbar.

## Mines Physique 1 MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet est composé de trois parties qui ont pour fil conducteur l'étude des oscillations du Millenium Bridge, à Londres. D'importantes oscillations avaient conduit à sa fermeture, quelques jours seulement après son inauguration !

- La première partie propose une modélisation simple du pont. Le système est décrit à l'aide d'un oscillateur masse-ressort faiblement amorti. On analyse la réponse de ce système à un échelon, puis à un forçage sinusoïdal qui décrit l'excitation périodique due au passage d'un piéton sur la passerelle. L'étude de la réponse fréquentielle fait ressortir une résonance à la fréquence typique de la marche des piétons. Un dispositif mécanique est alors ajouté pour supprimer le phénomène de résonance. Pour pouvoir conclure quant à l'utilité de cet ajout, on est conduit à analyser finement le contenu spectral de l'excitation du pont par les pas des piétons.
- C'est l'étude des ondes de compression longitudinales à travers la structure du pont qui débute la deuxième partie. S'ensuit l'établissement de l'équation d'onde pour la propagation d'ondes transversales le long d'une corde tendue.
- Dans la troisième partie, on modifie l'équation différentielle établie précédemment pour tenir compte de la rigidité interne de la structure. L'étude des modes propres d'oscillation de la passerelle est alors réalisée.

Cet énoncé aborde essentiellement les oscillateurs et les ondes mécaniques, et frise ainsi le hors-programme. Il contient peu d'applications numériques. Quelques analyses de courbes nécessitent un peu d'entraînement ou de bon sens.

## INDICATIONS

### Partie I

- 1 Remarquer que  $x = \ell = \text{OG}$ . L'expression de  $\tilde{x}$  est obtenue en cherchant la position d'équilibre.
- 2 La prise en compte de l'effet du vent revient à changer  $\alpha$  en  $\alpha - \beta$ .
- 3 On peut poser indifféremment  $\underline{F}_1 = F_1$  ou  $\underline{F}_1 = -F_1$ .
- 4 Inutile de dériver  $|\underline{H}|$  par rapport à  $\Omega$ , il suffit de dériver  $(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2$ .
- 5 Remarquer que pour  $\xi^2 \ll 1$ ,  $\omega_r \simeq \omega_0$ . Utiliser les propriétés d'une résonance aiguë pour estimer graphiquement la valeur de  $\xi$ .
- 8 Le spectre d'un signal périodique possède une propriété particulière, que seul un des spectres proposés vérifie. Remarquer que les autres spectres violent le théorème de Shannon (ce qui entraîne l'apparition de pics fantômes).

### Partie II

- 11 S'aider d'un schéma pour relier  $\Delta L$  à  $X(x + dx, t)$ ,  $X(x, t)$ ,  $x$  et  $dx$ . Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en  $dx$ . Noter ensuite que  $L = dx$ .  
Invoquer le principe des actions réciproques pour montrer que la force exercée par la partie à gauche de la tranche est  $-\vec{F}(x, t)$ . Réaliser un développement limité à l'ordre 1 en  $dx$ .
- 12 Projeter l'équation vectorielle obtenue sur  $\widehat{u}_x$ .
- 13 Projeter l'équation vectorielle obtenue à la question 12 sur  $\widehat{u}_y$ . Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en  $dx$ .

### Partie III

- 15 Montrer que  $g(t)$  est solution de l'équation  $g''(t) - \kappa g(t) = 0$  où  $\kappa$  est une constante. Utiliser l'hypothèse des très petits déplacements (devant  $h$  ou  $b$ ) pour déterminer le signe de  $\kappa$  et reconnaître une équation d'oscillateur harmonique.
- 16 L'équation différentielle vérifiée par  $f$  est homogène, linéaire, du quatrième ordre. Le cours de mathématiques indique que  $f$  est une combinaison linéaire de quatre fonctions indépendantes. Il suffit alors de montrer que les quatre fonctions apparaissant dans la combinaison linéaire proposée sont bien solutions de l'équation différentielle.
- 17 Commencer par déterminer les valeurs de A et C en utilisant les conditions en  $x = 0$ . Les conditions en  $x = L$  permettent de trouver D, puis la condition de quantification.
- 18 Certains modes semblent présenter une dépendance à la coordonnée  $z$  qui n'est pas prise en compte dans le modèle. Les autres modes rappellent ceux de la corde de Melde.

# LE MILLENIUM BRIDGE

## I. OSCILLATEUR SIMPLE

**1** Appliquons la loi de la quantité de mouvement au barycentre G, de masse  $m$ , dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \dot{x} \widehat{u}_x - mg \widehat{u}_x - k(\ell - \ell_0) \widehat{u}_x$$

D'après l'énoncé,  $\ell = OG = x$ . Projetons cette relation sur  $\widehat{u}_x$  :

$$m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$$

Divisons cette égalité par  $m$  et posons :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}$$

Il vient  $\ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + g = 0$

Notons  $\tilde{x}$  la valeur de  $x$  à l'équilibre. Alors,

$$\omega_0^2(\tilde{x} - \ell_0) + g = 0$$

Il s'ensuit que

$$\tilde{x} = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2}$$

Posons  $x(t) = X(t) + \tilde{x}$ , où  $X(t)$  représente la position de G par rapport à sa position à l'équilibre. L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 \left( X + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} - \ell_0 \right) + g = 0$$

Après simplification, il apparaît que

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$$

La constante  $\omega_0$  est la **pulsation propre**, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement. Le coefficient  $\xi$  est le **facteur d'amortissement**, il croît proportionnellement avec le coefficient de frottement  $\alpha$ .

**2** Pour  $\xi = 0$ , l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Il s'agit de l'équation de l'**oscillateur harmonique** de pulsation  $\omega_0$ . La solution  $X(t)$  est de la forme :

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Avec les conditions initiales imposées, on obtient que :

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad B\omega_0 = \dot{X}(0) = V_0$$

Par conséquent,

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\text{pour } \xi = 0)$$

Pour  $0 < \xi < 1$ , en cherchant des solutions sous forme  $X(t) = A e^{pt}$ , on aboutit à l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est  $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$

Il s'ensuit que  $p = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$

Ainsi,  $X(t)$  est de la forme :

$$X(t) = (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Cette fois, les conditions initiales se traduisent par

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad -A \xi\omega_0 + B \omega_a = \dot{X}(0) = V_0$$

si bien que

$$X(t) = \left( X_0 \cos \omega_a t + \frac{1}{\omega_a} [V_0 + \xi\omega_0 X_0] \sin \omega_a t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

On observe des **pseudo-oscillations**.

Enfin, l'ajout d'une force due au vent revient à changer  $\alpha$  en  $\alpha - \beta$ , c'est-à-dire à redéfinir le facteur d'amortissement  $\xi$  et à l'écrire :

$$\xi = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$$

Si  $\beta > \alpha$ ,  $\xi < 0$  et l'oscillateur devient instable. **Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.**

**3** La nouvelle équation du mouvement est

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + mg = -F_0 - F_1 \cos \omega t$$

Divisons par  $m$  et introduisons  $X$ , comme à la question 1,

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

Comme  $X = Y - F_0/(m\omega_0^2)$ , il vient :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

En régime sinusoïdal forcé (en posant  $\underline{F}_1 = -F_1$ ), on a :

$$\underline{Y}(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2) = \frac{\underline{F}_1}{m}$$

Par conséquent,

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{F}_1} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

donc

$$\underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

On aurait aussi pu poser  $\underline{F}_1 = F_1$ . Dans ce cas,

$$\underline{H} = -\frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

## Mines Physique 2 MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Valentin Raban (ENS Lyon) et Louis Salkin (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet, composé de quatre parties indépendantes de longueurs inégales, porte sur les exoplanètes et leur détection.

- La première partie s'intéresse aux propriétés d'une exoplanète et au moyen de détection par la méthode de la vitesse radiale. On commence par étudier le champ gravitationnel de la planète et on introduit la vitesse de libération pour déterminer les caractéristiques de son atmosphère. Puis on établit les différentes relations qui permettent d'obtenir des informations telles que la masse et le rayon de l'orbite de l'exoplanète. Reposant sur de nombreuses notions vues en première année, cette partie permet notamment de réviser des calculs de mécanique céleste.
- L'étude de la diminution d'un bruit est réalisée dans la deuxième partie. On analyse d'abord une méthode d'extraction d'un signal faible noyé dans un bruit en augmentant le nombre d'acquisitions du signal total. On termine par quelques questions sur un dispositif de refroidissement des composants électroniques.
- La troisième partie est consacrée à l'atténuation d'un signal dans un câble de transmission soumis à un bruit thermique. En partant d'un modèle unidimensionnel simple d'atténuation, on détermine les conséquences d'une mise en cascade d'équipements soumis au même bruit thermique. Cette partie repose essentiellement sur des bilans de puissance.
- Enfin, le problème s'intéresse au bruit thermique dans un condensateur.

Cette épreuve est de longueur raisonnable et alterne questions de cours et raisonnements plus difficiles. Peu de résultats intermédiaires sont donnés ; toutefois, le sujet comporte suffisamment de passages indépendants pour qu'il soit toujours possible de progresser.

Hormis deux ou trois questions de mécanique de seconde année portant sur les référentiels non galiléens et le théorème de Gauss appliqué au champ de gravitation, l'ensemble du sujet peut être traité dès la première année. Il peut servir de révision en mécanique céleste.

## INDICATIONS

### Partie I

4 L'accélération de la pesanteur contient l'accélération d'entraînement, qui s'écrit

$$\vec{a}_{ie} = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

avec  $\omega$  la vitesse angulaire et H le projeté du point M sur l'axe de rotation.

5 Utiliser la conservation de l'énergie mécanique avec  $E_m(\infty) = 0$ .

6 Les particules restent dans l'atmosphère si leur vitesse d'agitation thermique est plus petite que la vitesse de libération.

8 Comparer numériquement le pouvoir séparateur du télescope et l'angle qui sépare Jupiter et le Soleil à une distance de 42 années-lumière.

9 D'après le schéma fourni,  $\vec{v} \cdot \vec{v}_G = -v v_G \sin \theta$

11 Écrire la relation du barycentre avec les points E, P et G.

### Partie II

13 Après  $n$  acquisitions, le rapport de l'écart-type sur la moyenne est proportionnel à  $1/\sqrt{n}$ .

14 Comparer l'amplitude du signal utile et l'écart-type du bruit.

15 Le signal peut être considéré comme visible si le rapport de l'amplitude du signal utile sur l'écart-type du bruit est au minimum égal à 2.

17 Calculer numériquement les efficacités et utiliser  $P_F = e P_W$  où  $P_F$  est la puissance frigorifique et  $P_W$  la puissance électrique.

### Partie III

20 Introduire le coefficient d'atténuation linéique  $\lambda$  et faire un bilan d'énergie sur une tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$ .

23 Comparer l'expression de  $P_{S_2}$  trouvée avec l'expression de la puissance du bruit de sortie du système 1-2,

$$P_{B_{S_{12}}} = \gamma_{12} f_{12} P_{B_E}$$

### Partie IV

25 Utiliser la relation de la puissance électrique  $P = u(t) i(t)$  et la formule du condensateur  $q(t) = C u(t)$ .

# DÉTECTION DES EXOPLANÈTES

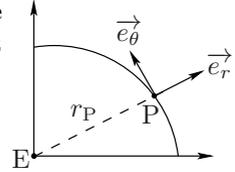
## I. FASCINANTES EXOPLANÈTES

**1** Le système est représenté ci-dessous. On distingue le **référentiel lié au point E** et **celui lié au point P**. Comme E est supposé fixe dans le référentiel de l'Univers, le référentiel lié à E est plus galiléen que celui lié au point P.

Le référentiel lié à P est un référentiel non galiléen. Il faut donc prendre en compte la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel lié à P.

Dans le référentiel lié à E, le point P est en mouvement circulaire uniforme de rayon  $r_P$  autour du point E. L'accélération se met sous la forme suivante :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r_P} \vec{e}_r$$



Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point P dans le référentiel lié à E supposé galiléen,

$$M_P \vec{a} = -\frac{\mathcal{G} M_P M_E}{r_P^2} \vec{e}_r$$

Projetons cette relation sur  $\vec{e}_r$ ,

$$-M_P \frac{v^2}{r_P} = -\frac{\mathcal{G} M_P M_E}{r_P^2}$$

d'où 
$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_E}{r_P}}$$

Comme le mouvement de P est circulaire uniforme,  $v = 2\pi r_P / T_P$ . Ainsi

$$\left(\frac{2\pi r_P}{T_P}\right)^2 = \frac{\mathcal{G} M_E}{r_P}$$

donc

$$\frac{T_P^2}{r_P^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_E}$$

**2** Le vaisseau se trouve à l'altitude  $h$  donc  $r_P = R_P + h$ . Appliquons la troisième loi de Kepler au vaisseau qui gravite autour du point P,

$$\frac{t_{\mathcal{E}}^2}{(R_P + h)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_P}$$

avec  $t_{\mathcal{E}}$  la période du vaisseau autour de ce point. Dans ce cas,

$$M_P = \frac{4\pi^2 (R_P + h)^3}{\mathcal{G} t_{\mathcal{E}}^2} = 1,51 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Imaginons une structure comparable à celle de la Terre : un manteau de masse volumique  $\rho_{\text{mant}}$  homogène et un noyau de masse volumique  $\rho_n = 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$  de rayon  $R_P/2$ . La masse totale  $M_P$  s'écrit

$$M_P = \rho_n \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R_P}{2}\right)^3 + \rho_{\text{mant}} \left(\frac{4}{3}\pi R_P^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R_P}{2}\right)^3\right)$$

Il vient 
$$\rho_{\text{mant}} = \frac{3M_P - \rho_n \times 4\pi (R_P/2)^3}{4\pi (R_P^3 - (R_P/2)^3)} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

Cette valeur est tout à fait pertinente pour un manteau rocheux.

La structure de la planète est probablement comparable à celle de la Terre.

**3** L'énoncé du théorème de Gauss appliqué au champ de gravitation est le suivant :

Soit S une surface fermée s'appuyant sur un volume V. Le flux sortant du champ gravitationnel à travers S s'écrit

$$\oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} M_{\text{int}}$$

où  $M_{\text{int}}$  est la masse intérieure à la surface S.

Tous les plans contenant le centre de la sphère et le vecteur  $\vec{e}_r$  sont des plans de symétrie de la distribution de masse. Par conséquent,

$$\vec{G} = G(M) \vec{e}_r$$

La distribution de masse est invariante par rotation selon  $\theta$  et  $\phi$ , d'où

$$\vec{G} = G(r) \vec{e}_r$$

Appliquons le théorème de Gauss sur une surface sphérique S de rayon  $R_P$ . Comme  $M_{\text{int}} = M_P$ , il vient

$$4\pi R_P^2 G(R_P) = -4\pi\mathcal{G} M_P$$

c'est-à-dire

$$\vec{G} = -\frac{\mathcal{G} M_P}{R_P^2} \vec{e}_r$$

d'où

$$\|\vec{G}\| = \frac{\mathcal{G} M_P}{R_P^2} = 4,03 \text{ m.s}^{-2}$$

**4** La pesanteur est définie dans le référentiel non galiléen de la planète.

Dans la définition de l'accélération de la pesanteur, il faut prendre en compte l'accélération d'entraînement  $\vec{a}_{\text{ie}}$ .

Introduisons le projeté H d'un point M à la surface de la planète sur l'axe de rotation de la planète. La force d'inertie d'entraînement appliquée à ce point s'écrit

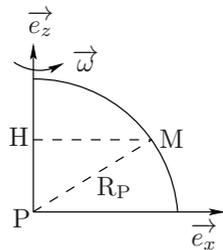
$$\vec{f}_{\text{ie}} = -m \vec{a}_{\text{ie}} = m \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

avec  $\omega$  la vitesse angulaire de la planète autour de son axe de rotation. Le poids  $m \vec{g}$  est la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement. Divisons par  $m$  de part et d'autre,

$$\vec{g} = \vec{G} - \vec{a}_{\text{ie}}$$

Or  $\overrightarrow{HM} = \vec{0}$  sur les pôles et  $\overrightarrow{HM} = R_T \vec{e}_x$  à l'équateur. Donc

$$g_{\text{pôles}} = \|\vec{G}\| = 4,03 \text{ m.s}^{-2}$$



## Mines Chimie MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Wieczny (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Habituellement dédié à l'étude d'un élément chimique, le sujet de chimie du concours Mines-Ponts en filière MP a cette année pour thème le béton. Les domaines abordés sont cependant classiques et sans surprise pour cette épreuve très courte. L'étude est divisée en quatre parties de longueurs et de difficultés variables.

- La première partie concerne la réaction à l'origine du durcissement du ciment, principal constituant du béton, en présence d'eau. On s'intéresse au bilan d'avancement de la réaction, puis on détermine son enthalpie standard de réaction à l'aide d'une étude calorimétrique.
- La deuxième partie s'articule autour de la basicité du béton, plus particulièrement de la solution interstitielle qui se trouve dans ses pores. La courbe d'un dosage conductimétrique est fournie et doit être analysée de façon à déterminer la concentration et le pH de cette solution.
- La troisième partie, qui est la plus longue, s'intéresse à la carbonatation du béton par le dioxyde de carbone atmosphérique. Ce phénomène est à l'origine d'une fragilisation du béton. Les questions sont variées mais restent classiques sur des thèmes comme le remplissage électronique, la thermodynamique chimique et la cristallographie.
- La dernière partie étudie la corrosion du béton armé à travers le diagramme potentiel-pH du fer et les courbes courant-potentiel. Diagramme et courbes sont fournis et il convient de les interpréter et de les utiliser pour déterminer les réactions chimiques et électrochimiques impliquées, ainsi que des caractéristiques électriques comme le potentiel et le courant de corrosion.

S'il est classique d'observer une progression de la difficulté en cours d'épreuve dans ce concours, ce n'est pas vraiment le cas ici, avec notamment des questions calculatoires dès le début. Dans cette épreuve de type sprint, il ne faut pas hésiter à traiter en premier les questions ne nécessitant pas de calculs afin d'avancer le plus rapidement possible. Rappelons enfin que les thèmes abordés et les questions posées dans cette épreuve sont récurrents d'une année sur l'autre, ce qui rend la préparation aisée pour qui travaille un minimum la chimie en cours d'année.

## INDICATIONS

- 1 L'énoncé ne donne pas les masses molaires de O et H:  $\mathcal{M}_O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $\mathcal{M}_H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$ .
- 2 Décomposer la transformation en deux: d'abord la réaction à T et P constantes, puis la variation de température.
- 5 Ne pas oublier les ions chlorure de l'acide chlorhydrique.
- 7 Le pH est décroissant car on ajoute de l'acide. La solution à l'équivalence est neutre.
- 8 De quel élément la structure de  $\text{Ca}^{2+}$  est-elle isoélectronique?
- 10 Écrire l'équation de réaction de la carbonatation du béton, puis exprimer sa constante d'équilibre à l'aide des produits de solubilité.
- 11 Calculer l'enthalpie standard de réaction de la solubilisation, puis utiliser la loi de Van't Hoff. Aucune hypothèse n'est en fait nécessaire.
- 12 Calculer l'enthalpie libre standard de réaction pour obtenir ensuite la constante d'équilibre.
- 15 Le volume formulaire est le volume d'une seule entité. L'exprimer à l'aide du volume molaire.
- 16 La perspective du dessin est trompeuse: la maille est un prisme à base losange dont seuls les sommets sont occupés.
- 19 L'oxydation du fer par l'eau en milieu basique aboutit au domaine C.
- 20 Une couche protectrice peut se former en surface.
- 21 Le potentiel de corrosion correspond au point de fonctionnement pour lequel les intensités anodique et cathodique sont égales en valeur absolue.
- 22 Les points donnés dans l'énoncé forment deux droites sécantes.

## LE BÉTON

**1** Commençons par calculer les quantités de matière des réactifs en utilisant les masses molaires, non données dans l'énoncé, de l'oxygène ( $\mathcal{M}_O = 16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) et de l'hydrogène ( $\mathcal{M}_H = 1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ):

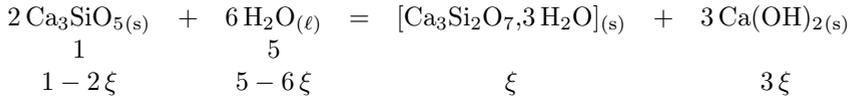
$$n_1(\text{Ca}_3\text{SiO}_5) = \frac{m_1}{\mathcal{M}_1} = \frac{228}{3 \times 40 + 28 + 5 \times 16} = 1 \text{ mol}$$

et

$$n_2(\text{H}_2\text{O}) = \frac{m_2}{\mathcal{M}_2} = \frac{90}{18} = 5 \text{ mol}$$

Si la masse molaire de l'hydrogène n'est généralement pas un souci, celle de l'oxygène est souvent mal connue. Il peut être utile de se rappeler que pour les éléments légers (sauf H), la masse molaire est le double du numéro atomique qui, lui, est bien donné dans l'énoncé.

Il y a 5 fois plus d'eau que de ciment, pour une stœchiométrie 3:1 donc **le ciment est le réactif limitant**. Le bilan d'avancement en moles est le suivant :



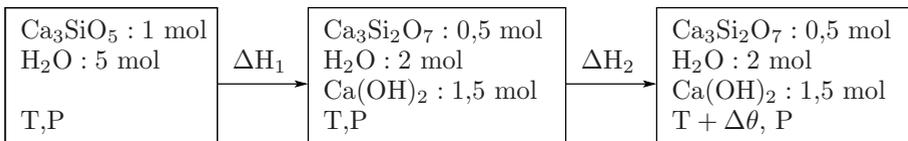
En supposant la réaction totale, c'est le ciment qui disparaît en premier, pour un avancement final  $\xi_{\max} = 0,5 \text{ mol}$ . Les quantités de matière finales sont alors

$n_f(\text{Ca}_3\text{SiO}_5) = 0 \text{ mol}$	$n_f(\text{Ca}_3\text{Si}_2\text{O}_7, 3 \text{H}_2\text{O}) = 0,5 \text{ mol}$
$n_f(\text{H}_2\text{O}) = 2 \text{ mol}$	$n_f(\text{Ca}(\text{OH})_2) = 1,5 \text{ mol}$

**2** L'évolution se faisant à pression constante, la variation d'enthalpie ( $\Delta H$ ) du système, constitué du calorimètre et de son contenu, est égale au transfert thermique ( $Q$ ) reçu du milieu extérieur. Par ailleurs, la transformation est supposée adiabatique ( $Q = 0$ ), ce qui donne une évolution isenthalpique :

$$\Delta H = Q = 0$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi par la transformation. On choisit de décomposer en deux évolutions simples : la réaction chimique à température et pression constantes, puis la variation de température du système final.



Il vient ainsi  $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$

Les variations d'enthalpie s'écrivent

$$\Delta H_1 = \int_0^{\xi_{\max}} \Delta_r H^\circ d\xi = \xi_{\max} \Delta_r H^\circ$$

et

$$\Delta H_2 = \int_T^{T+\Delta\theta} C_{p,\text{tot}} dT = \Delta\theta \cdot (\sum n_i C_{p,i})$$

Numériquement,

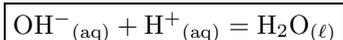
$$\Delta H_1 = 0,5 \times \Delta_r H^\circ \quad \text{et} \quad \Delta H_2 = 15 \times (0,5 \times 340 + 1,5 \times 80 + 2 \times 75) = 6\,600 \text{ J}$$

soit

$$\boxed{\Delta_r H^\circ = -13,2 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}}$$

Il est utile de vérifier que l'on trouve bien un résultat négatif car la réaction est exothermique (la température a augmenté).

**3** La réaction de titrage est



dont la constante d'équilibre est reliée au produit ionique de l'eau :

$$\boxed{K^\circ = \frac{1}{K_e} = 10^{14}}$$

La réaction est quantitative ( $K^\circ \gg 1$ ), ce qui est indispensable pour une réaction de dosage.

**4** Le volume équivalent lu pour ce dosage est  $V_e = 1,0 \text{ mL}$ . D'après la réaction de titrage, la relation à l'équivalence s'écrit, en notant  $c_0$  la concentration initiale en ions hydroxyde  $\text{OH}^-$ ,

$$c_0 V_0 = c V_e$$

d'où 
$$c_0 = c \frac{V_e}{V_0} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} = [\text{OH}^-]$$

Ainsi, 
$$\text{pOH} = -\log[\text{OH}^-] = 3 - \log 5 = 3 - \frac{\ln 5}{\ln 10}$$

Numériquement, 
$$\text{pOH} = 3 - \frac{1,6}{2,3} \approx 2,3$$

donc

$$\boxed{\text{pH} = 14 - \text{pOH} = 11,7}$$

Compte tenu des indications de l'énoncé, il est également possible de considérer que la solution recueillie en surface du béton est une solution saturée d'hydroxyde de calcium. On peut alors calculer le pH à l'équilibre de la saturation.



En notant  $s$  la solubilité, il vient, à l'équilibre

$$K_s = s \cdot (2s)^2 = 4s^3 = 5 \cdot 10^6$$

soit

$$s \approx 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

d'où

$$[\text{OH}^-] \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

Ainsi,

$$\text{pOH} = 2 - \log 2 \approx 1,7$$

Finalement,

$$\text{pH} \approx 12,3$$

## X/ENS Physique MP 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Valentin Raban (ENS Lyon) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Louis Salkin (Professeur en CPGE).

---

Le sujet porte sur le couplage optomécanique entre une cavité Fabry-Perot et le champ électromagnétique qu'elle contient. La source du couplage est la force de pression de radiation de ce champ. Les deux parties de l'épreuve sont de longueur et de difficulté inégales.

- La première partie aborde le calcul du champ électrique dans la cavité. Les premières questions sont classiques et constituent une bonne illustration de l'utilisation des facteurs de transmission/réflexion. Cette approche conduit naturellement à relier la sélectivité de la cavité à ses pertes énergétiques et permet d'aboutir à une équation dynamique pour le champ.
- Dans la deuxième partie, l'un des miroirs est rendu mobile et attaché à un ressort. La force de pression de radiation, qui tend à pousser le miroir, s'oppose alors à la force de rappel du ressort. De cette compétition résultent des positions d'équilibre qui font l'objet des dernières questions du sujet.

Le sujet n'est pas particulièrement long, mais certaines questions de la fin de la deuxième partie sont peu guidées et nécessitent d'y consacrer un temps conséquent. Celles-ci reposent notamment sur une analyse de courbes qu'il faut savoir tracer sans l'aide de la calculatrice, interdite ici. Elles restent néanmoins les questions les plus intéressantes.

Remarquons par ailleurs que la plupart des résultats intermédiaires sont donnés dans l'énoncé, ce qui évite de rester bloqué.

## INDICATIONS

### Partie 1

- 3 Écrire les champs comme provenant de la réflexion/transmission d'autres champs.
- 6 L'intensité est proportionnelle au module du champ électrique au carré.
- 7 Écrire  $\mathcal{E}_{II} = \mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-$  puis utiliser les expressions établies à la question 4.
- 8 Pour déterminer la nature du champ lorsque  $R = 1$ , commencer par écrire la condition de réflexion totale sur  $(M_1)$ , puis calculer le champ dans la cavité.
- 9 Introduire  $\omega = \omega_n + \delta\omega$  dans l'expression de  $\Theta$ , puis utiliser le développement limité  $e^x \approx 1 + x$  valable pour  $x \ll 1$ .
- 10 Faire l'analogie avec les filtres en électrocinétique.
- 15 L'énoncé n'est pas clair ici. Il faut introduire un  $dt$  différent du  $\Delta t$  des questions précédentes.
- 17 Remplacer  $\Delta\omega_{1/2}$  par son expression en fonction de  $\gamma$ .
- 18 Commencer par dériver l'expression (17) de l'énoncé par rapport au temps. Écrire ensuite  $\omega = \omega_c + \delta\omega$  et utiliser la question 17 pour exprimer  $\delta\omega \mathcal{E}_+$ .

### Partie 2

- 21 Substituer  $L$  par  $L(t)$  dans l'expression de  $\omega_c$ .
- 24 L'équation (19) reste valable.
- 26 Calculer la quantité de mouvement totale reçue par le miroir. La force qui s'exerce sur lui est alors  $F_{pr} = dp_{tot}/dt$ .
- 27 La puissance électromagnétique est l'intégrale surfacique du vecteur de Poynting.
- 30 Utiliser l'équation (22) de l'énoncé.
- 33 La question précédente permet d'écrire  $da/dt = 0$ .
- 34 Utiliser les expressions (23), (24) et (26) de l'énoncé.
- 37 Les positions d'équilibre correspondent aux points d'intersection entre la représentation graphique de  $F$  et la droite  $y = A\xi$ .
- 38 La courbe associée à  $F$  traduit la force de pression de radiation tandis que la droite  $y = A\xi$  représente la force de rappel du ressort.
- 39 Tracer  $F$ , puis chercher dans quelles conditions une droite passant par l'origine intersecte trois fois  $F$ .
- 41 Utiliser les résultats des questions 4 et 17. La puissance est proportionnelle au module du champ électrique au carré.
- 42 Faire varier la pente  $A$  de la droite, et regarder comment évoluent les points d'intersection avec  $F$ .

## OPTOMÉCANIQUE EN CAVITÉ

### I. CAVITÉ RÉSONANTE À LONGUEUR FIXÉE

**1** L'énergie est proportionnelle au carré du champ électrique: R et T sont donc respectivement les coefficients de réflexion et de transmission **en énergie** des miroirs. La relation  $R + T = 1$  traduit ainsi **la conservation de l'énergie de l'onde**.

**2** Puisqu'il n'y a pas de source de champ dans la zone III, le champ  $E_{III}$  ne provient que du champ  $E_+$  transmis à travers  $(M_2)$ : il est par conséquent **progressif** tout comme  $E_+$ .

**3** Le champ  $E_+$  résulte de la transmission de  $E_i$  à travers  $(M_1)$  et de la réflexion de  $E_-$  sur la face intérieure de  $(M_1)$ . On a donc en  $z = 0$ :

$$\mathcal{E}_+ e^{i\omega t} = \tau \mathcal{E}_i e^{i\omega t} - \rho \mathcal{E}_- e^{i\omega t}$$

soit

$$\boxed{\mathcal{E}_+ = \tau \mathcal{E}_i - \rho \mathcal{E}_-}$$

Le champ  $E_-$  provient uniquement de la réflexion de  $E_+$  sur le miroir  $(M_2)$ . En  $z = L$ ,

$$\mathcal{E}_- e^{i\omega(t+L/c)} = -\rho \mathcal{E}_+ e^{i\omega(t-L/c)}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{E}_- = -\rho \mathcal{E}_+ e^{-2i\omega L/c}}$$

Enfin,  $E_t$  a pour origine la transmission de  $E_+$  à travers  $(M_2)$ , que l'on écrit

$$\mathcal{E}_t e^{i\omega(t-L/c)} = \tau \mathcal{E}_+ e^{i\omega(t-L/c)}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_t = \tau \mathcal{E}_+}$$

**4** Substituons  $\mathcal{E}_-$  dans l'expression de  $\mathcal{E}_+$ :

$$\mathcal{E}_+ = \tau \mathcal{E}_i + \rho^2 \mathcal{E}_+ e^{-2i\omega L/c}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{E}_+ = \frac{\tau}{1 - \rho^2 e^{-2i\omega L/c}} \mathcal{E}_i$$

Puisque  $\tau = \sqrt{T}$  et  $\rho = \sqrt{R}$ , on aboutit à

$$\boxed{\mathcal{E}_+ = \frac{\Theta(\omega)}{\sqrt{T}} \mathcal{E}_i \quad \text{avec} \quad \Theta(\omega) = \frac{T}{1 - R e^{-2i\omega L/c}}}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{E}_- = -\sqrt{R} e^{-2i\omega L/c} \mathcal{E}_+ = -\Theta(\omega) \sqrt{\frac{R}{T}} e^{-2i\omega L/c} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{E}_t = \sqrt{T} \mathcal{E}_+ = \Theta(\omega) \mathcal{E}_i \end{cases}}$$

**5** Calculons  $|\Theta(\omega)|^2$ :

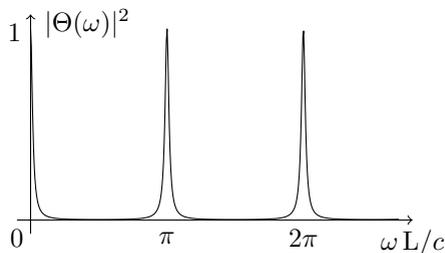
$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{T^2}{(1 - R e^{-2i\omega L/c})(1 - R e^{2i\omega L/c})} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2\omega L/c)}$$

donc 
$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 2R(1-\cos(2\omega L/c))}$$

Puisque  $1 - \cos(2a) = 2 \sin^2(a)$  et  $R + T = 1$ , on en conclut

$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{4R}{T^2} \sin^2\left(\frac{\omega L}{c}\right)}$$

Pour  $R = 0,9$  on a  $4R/T^2 \gg 1$  donc la fonction  $|\Theta(\omega)|^2$  ne prend des valeurs appréciables qu'au voisinage des annulations du sinus.



**6** La fonction  $|\Theta|^2$  est maximale lorsque le sinus s'annule, soit

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette condition de quantification peut se réécrire  $2L = n\lambda$ : le chemin optique correspondant à un aller-retour dans la cavité doit valoir un nombre entier de fois la longueur d'onde. C'est une condition d'interférences constructives.

Pour cette famille de pulsations,  $|\Theta(\omega_n)|^2 = 1$ . Par ailleurs, puisque l'intensité  $I$  est proportionnelle au carré du champ,  $I = \alpha |\mathcal{E}|^2$ . En utilisant la relation (14),

$$I_t = \alpha |\mathcal{E}_t|^2 = \alpha |\Theta(\omega_n)|^2 |\mathcal{E}_i|^2 = I_i$$

L'intensité incidente est donc intégralement transmise pour les pulsations  $\omega_n$ .

**7** L'intensité  $I_{II}(z)$  s'écrit

$$\begin{aligned} I_{II}(z) &= \alpha |\mathcal{E}_{II}|^2 \\ &= \alpha |\mathcal{E}_+ e^{i\omega(t-z/c)} + \mathcal{E}_- e^{i\omega(t+z/c)}|^2 \\ &= \alpha |\mathcal{E}_+ e^{-i\omega z/c} + \mathcal{E}_- e^{i\omega z/c}|^2 \quad \text{car } |e^{i\omega t}|^2 = 1 \\ I_{II}(z) &= \alpha |\mathcal{E}_+|^2 + \alpha |\mathcal{E}_-|^2 + \alpha \mathcal{E}_+ \mathcal{E}_-^* e^{-2i\omega z/c} \\ &\quad + \alpha \mathcal{E}_- \mathcal{E}_+^* e^{2i\omega z/c} \end{aligned}$$

Remplaçons  $\mathcal{E}_-$  et  $\mathcal{E}_+$  par les formules établies à la question 4 :

$$\begin{aligned} I_{II}(z) &= \alpha \frac{|\Theta|^2}{T} |\mathcal{E}_i|^2 + \alpha \frac{R|\Theta|^2}{T} |\mathcal{E}_i|^2 - \alpha \frac{\sqrt{R}|\Theta|^2}{T} e^{2i\omega L/c} e^{-2i\omega z/c} |\mathcal{E}_i|^2 \\ &\quad - \alpha \frac{\sqrt{R}|\Theta|^2}{T} e^{-2i\omega L/c} e^{2i\omega z/c} |\mathcal{E}_i|^2 \end{aligned}$$

soit

$$I_{II}(z) = \frac{|\Theta(\omega)|^2}{T} \left\{ 1 + R - 2\sqrt{R} \cos\left(\frac{2\omega}{c}(z-L)\right) \right\} I_i$$

# X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2016

## Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) ; il a été relu par Cyril Ravat (Professeur en CPGE) et Julien Dumont (Professeur en CPGE).

---

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants, l'un portant sur l'électromagnétisme et la physique quantique, l'autre sur les sciences de l'ingénieur, avec de la mécanique du solide et des asservissements.

- Le premier sujet se compose de trois parties distinctes qui traitent de propagation dans des milieux inhomogènes. Il s'agit tout d'abord d'étudier une onde électromagnétique dans une fibre optique dont l'indice varie légèrement avec le rayon. Ensuite, les questions portent sur un milieu stratifié, c'est-à-dire dont l'indice varie selon une seule direction. On cherche à montrer que l'onde a localement la structure d'une onde plane. Enfin, la dernière partie porte sur l'analyse de l'équation de Schrödinger dans l'approximation semi-classique.
- Le deuxième sujet porte sur un simulateur de conduite de véhicule à deux roues. L'étude cinématique est assez ardue et nécessite une bonne compréhension des trois pages consacrées à la description du système. La fin du sujet présente différents aspects de l'asservissement en position du simulateur. Il s'agit plus ici de questions de compréhension que de longs calculs.

Les deux sujets sont équilibrés en longueur et en durée compte tenu du temps nécessaire pour s'appropriier la partie mécanique. La partie sciences physiques, bien qu'étiquetée électromagnétisme, reprend beaucoup de résultats de physique quantique et pouvait surprendre les candidats.

## INDICATIONS

## Partie I

- 1 Simplifier le laplacien du vecteur  $\vec{E}$  proposé par l'énoncé en utilisant les coordonnées cartésiennes.
- 3 La densité volumique d'énergie électrique est proportionnelle au carré de la norme du champ électrique.
- 4 Les équations étant analogues, déduire le résultat sur  $\mu$  des propriétés de  $N$ , rappelées dans l'énoncé. De même, le mode fondamental du champ électrique  $E_0(x, y)$  est analogue à celui de la fonction d'onde  $\psi_0(x, y)$ .
- 5 Pour que l'onde se propage, il faut que son nombre d'onde soit réel.
- 6 Utiliser la définition de  $\mu$  et sa positivité pour obtenir la propriété sur la vitesse de phase. Pour exprimer la vitesse de groupe, négliger  $q_0$  devant  $1/a$ , comme l'indique l'énoncé.
- 7 Calculer le gradient et comparer chacun de ses termes avec  $q_0^2$ , sachant que  $r < R \ll a$  et  $1/a \ll q_0$ .
- 8 Utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.
- 12 Développer  $A(z)$  et  $S(z)$  à l'ordre 1 en  $z$  et, à l'échelle de  $\lambda$ , négliger les variations de  $A(z)$ .
- 13 Simplifier l'équation de Maxwell-Faraday en utilisant la forme de  $E$  proposée.
- 15 Réécrire l'équation (10) avec  $\sigma_0(x)$  et  $\sigma_1(x)$  et ne conserver que les termes de plus bas degrés en  $\hbar$ .

## Partie II

- 17 Utiliser les schémas de la figure (5) dans le cas d'un roulis pur puis d'un lacet pur, sans tangage.
- 21 Le produit mixte est invariant par permutation circulaire de ses membres :
 
$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$$
- 24 Le théorème de la valeur finale avec une entrée en échelon conduit au résultat.
- 25 Considérer que le dépassement du filtre complet vaut  $P_\infty$ .
- 27 Dériver la position  $h(t)$ . On rappelle les définitions des fonctions hyperboliques :

$$\cosh a = \frac{\exp(a) + \exp(-a)}{2} \quad \text{et} \quad \sinh a = \frac{\exp(a) - \exp(-a)}{2}$$

## 1. PROPAGATION DANS LES MILIEUX NON HOMOGENES

**1** Pour établir l'équation scalaire de propagation de  $E(x, y)$ , exprimons tout d'abord le laplacien du champ électrique :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} &= \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \\ &= \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \exp[j(\kappa z - \omega t)] + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \exp[j(\kappa z - \omega t)] - \kappa^2 E \exp[j(\kappa z - \omega t)] \right] \hat{y}\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation vectorielle (6) devient, en éliminant le terme exponentiel,

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \left[ n_0^2 k_0^2 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right) - \kappa^2 \right] E = 0}$$

Or, avec  $\xi = (q_0/a)^{1/2} x$  et  $\eta = (q_0/a)^{1/2} y$ , on a

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left( \frac{q_0}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial E}{\partial \xi} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{q_0}{a} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2}$$

et de même  $\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left( \frac{q_0}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial E}{\partial \eta} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{q_0}{a} \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2}$

Posons alors  $q_0 = n_0 k_0$  et  $\mu = (q_0^2 - \kappa^2)a/q_0$  pour obtenir successivement

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \left[ n_0^2 k_0^2 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right) - \kappa^2 \right] E \\ &= \frac{q_0}{a} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{q_0}{a} \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} + \left[ q_0^2 \left( 1 - \frac{a}{q_0} \frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} \right) - \kappa^2 \right] E \\ &= \frac{q_0}{a} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{q_0}{a} \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} + \left[ q_0^2 - \kappa^2 - \frac{q_0}{a} (\xi^2 + \eta^2) \right] E \\ &= \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} + \left[ \frac{a}{q_0} (q_0^2 - \kappa^2) - (\xi^2 + \eta^2) \right] E\end{aligned}$$

et enfin

$$\boxed{0 = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} + [\mu - (\xi^2 + \eta^2)] E}$$

**2** La constante de Planck réduite  $\hbar$  a la dimension d'une énergie multipliée par un temps, comme l'indique la relation

$$\mathcal{E} = h\nu = \hbar\omega$$

On retrouve la dimension de l'énergie avec la relation qui donne l'énergie cinétique :

$$[\mathcal{E}] = [mv^2/2] = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

Par conséquent,  $\left[ \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right] = \left( \frac{\text{M} \cdot \text{T}^{-1}}{\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}} \right)^{1/2} = \text{L}^{-1}$

$$\boxed{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \text{ a la dimension de l'inverse d'une longueur.}}$$

Remarquons que  $\sqrt{q_0/a}$  a également la dimension de l'inverse d'une longueur. Les variables réduites  $(\xi, \eta)$  et  $(u, v)$  sont ainsi effectivement adimensionnées.

Réécrivons l'équation de Schrödinger stationnaire d'un oscillateur harmonique en utilisant les variables réduites proposées :

$$E_N \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \left[ \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) \right] \psi$$

d'où 
$$(N + 1) \hbar \omega \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \left[ \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) \right] \psi$$

Rassemblons tous les termes dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \left[ (N + 1) \hbar \omega - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) \right] \psi \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\hbar \omega}{2} \left[ 2(N + 1) - \frac{m \omega}{\hbar} (x^2 + y^2) \right] \psi \\ &= \frac{\hbar \omega}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\hbar \omega}{2} [2(N + 1) - (u^2 + v^2)] \psi \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + [2(N + 1) - (u^2 + v^2)] \psi$$

On retrouve une équation analogue à celle obtenue à la question 1.

**3** La condition de normalisation du champ électrique traduit la constance de la densité linéique d'énergie électrique sur une section de fibre perpendiculaire à la direction de propagation. En effet, la densité volumique d'énergie électrique est proportionnelle au carré de la norme du champ électrique. La relation de normalisation correspond à l'intégration de cette densité volumique sur une section droite de la fibre. **La normalisation traduit une énergie électrique finie.** Le champ électrique s'exprime en  $V \cdot m^{-1}$  donc **V s'exprime en volt.**

**4** Puisque l'équation portant sur la fonction d'onde  $\psi(x, y)$  est analogue à celle qui porte sur l'amplitude  $E(x, y)$ , ses résultats lui sont transposables, à condition de remplacer  $\mu$  par  $2(N + 1)$ . Or,  $N \geq 0$  implique

$$2(N + 1) \geq 2$$

donc

$$\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

Le mode fondamental de propagation correspond ainsi à  $\mu = 2$ . En procédant par analogie en remplaçant  $m\omega/\hbar$  par  $q_0/a$  dans la fonction d'onde  $\psi_0$ , on obtient, à une constante multiplicative C près,

$$E_0(x, y) = C \exp \left[ -\frac{q_0}{2a} (x^2 + y^2) \right]$$

**Le mode de propagation fondamental est bien gaussien.**

**5** Pour que la propagation soit possible, il faut que la constante de propagation  $\kappa$  soit réelle non nulle donc que  $\kappa^2 > 0$ , ce qui impose

$$q_0^2 - \mu \frac{q_0}{a} > 0$$

donc

$$q_0 = n_0 \frac{\omega}{c} > \frac{\mu}{a}$$

et

$$\omega > \omega_c = \frac{\mu c}{a n_0}$$